**4.3 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

הוכחה:

1. נוכיח כי   
   אזי צריך להוכיח כי לכל k מתקיים אבל אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן . וזה מתקיים לכל k ולכן . ושוב אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
   ולכן
2. נוכיח כי .   
   נניח בשלילה כי .  
   ולכן נראה כי דבר זה לא יכול להיות על ידי שנראה כי .  
   נניח שוב בשלילה כי קיים   
   אבל  
     
   אבל לכל k *.  
   אבל לא קיימים n-ים כאלה ולכן .  
   אבל אזי קיבלנו כי ואזי קיבלנו כי אבל אולטרה-פילטר ומהגדרתו . בסתירה(הנחת שלילה שניה)  
   ולכן לא קיימים k כך ש-ולכן* .  
   אבל מההנחה  *ולכן .  
   ושוב קיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
   ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
   מש"ל*
3. תהיינה

*נוכיח כי*

*ז"א צריך להוכיח כי*

*נוכיח כי*

*יהי*

*ולכן*

*אבל*

*וכן*

*אולטרה-פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים כי וכן ולכן וגם ולכן .*

*ולכן הוכחנו כי .*

*נוכיח כוון שני יהי*

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם אבל*

ולכן קיבלנו כי גם .

ולכן .

ולכן הוכחנו את ההכלה

ומכל האמור קיבלנו כי

נתון כי

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל הוכחנו כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

*אזי לכל מתקיים:*

ולכן קיבלנו כי

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

1. *לכל מתקיים:*  
     
   ולכן גם .
   1. ולכן *.*

מ1,2,3 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*מ1 ,2 ו3 קיבלנו כי פילטר.*

*יהי נתבונן ב*

*אזי לכל מתקיים*

*מצד שני מתקיים*

*ולכן*

*ולכן כי אולטרא פילטר ולפי 2.3.*

*ולכן קיבלנו כי .*

*ולכן קיבלנו לפי 2.3 כי אולטרא פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .