**4.3 למה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

הוכחה:

נגדיר

אזי:

1. נוכיח כי

אזי צריך להוכיח כי מטענת-עזר-5 נובע כי .

אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
ולכן

מש"ל.

1. נוכיח כי .

נניח בשלילה כי .  
ולכן מטענת-עזר-6 נובע כי .

אבל מההנחה  *ולכן .  
וקיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
מש"ל*

1. תהיינה

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל מטענת-עזר-7 נובע כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

ולכן

*אולטרה פילטר וכן מטענת עזר-8*

*ולכן נקבל מהגדרת פילטר נקבל כי .*

*ולכן נקבל כי מש"ל.*

מ1,2,3,4 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*יהי נתבונן ב.*

*נוכיח כי*

*מהנתון כי אזי אבל אולטרה פילטר ולכן ומטענת-עזר-9 נקבל כי*

*ולכן ולכן נקבל כי .*

*ומכל האמור נקבל לפי 2.3 כי אולטרא פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .