**4.3 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

הוכחה:

נגדיר

אזי:

1. נוכיח כי

אזי צריך להוכיח כי לכל k מתקיים אבל אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן . וזה מתקיים לכל k ולכן . ושוב אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
ולכן

1. נוכיח כי .

נניח בשלילה כי .  
ולכן נראה כי דבר זה לא יכול להיות על ידי שנראה כי .  
נניח שוב בשלילה כי קיים   
אבל  
  
אבל לכל k *.  
אבל לא קיימים n-ים כאלה ולכן .  
אבל אזי קיבלנו כי ואזי קיבלנו כי אבל אולטרה-פילטר ומהגדרתו . בסתירה(הנחת שלילה שניה)  
ולכן לא קיימים k כך ש-ולכן* .  
אבל מההנחה  *ולכן .  
ושוב קיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
מש"ל*

1. תהיינה

*נוכיח כי*

*ז"א צריך להוכיח כי*

*נוכיח כי*

*יהי*

*ולכן*

*אבל*

*וכן*

*אולטרה-פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים כי וכן ולכן וגם ולכן .*

*ולכן הוכחנו כי .*

*נוכיח כוון שני יהי*

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם אבל*

ולכן קיבלנו כי גם .

ולכן .

ולכן הוכחנו את ההכלה

ומכל האמור קיבלנו כי

נתון כי

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל הוכחנו כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

נוכיח כי

יהי ונוכיח כי

ולכן .

אבל ולכן

אולטרה פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים גם .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ולכן  *אולטרה פילטר וכן מקודם קיבלנו כי  
 ולכן שוב מהגדרת פילטר נקבל כי .*

*ולכן נקבל כי מש"ל.*

מ1,2,3,4 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*יהי נתבונן ב.*

*נוכיח כי*

*ז"א צריך להוכיח כי*

*נראה כי*

*מהנתון כי אזי אבל אולטרה פילטר ולכן וממה שהראינו נקבל כי ולכן נקבל כי .*

*ומכל האמור נקבל לפי 2.3 כי אולטרא פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .